Relatività e Meccanica Quantistica: concetti e idee

Relativity and Quantum Mechanics: concepts and ideas

Settimana 6

Lezione 6.1
L’esperimento con due fenditure – II parte

Carlo Cosmelli

SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA

coursera

Perché vedo l’interferenza con gli elettroni

Ma sono sicuro che gli elettroni sono delle particelle che arrivano uno per volta?
Sì, sento il click del contatore…vedo l’immagine sulla lastra.

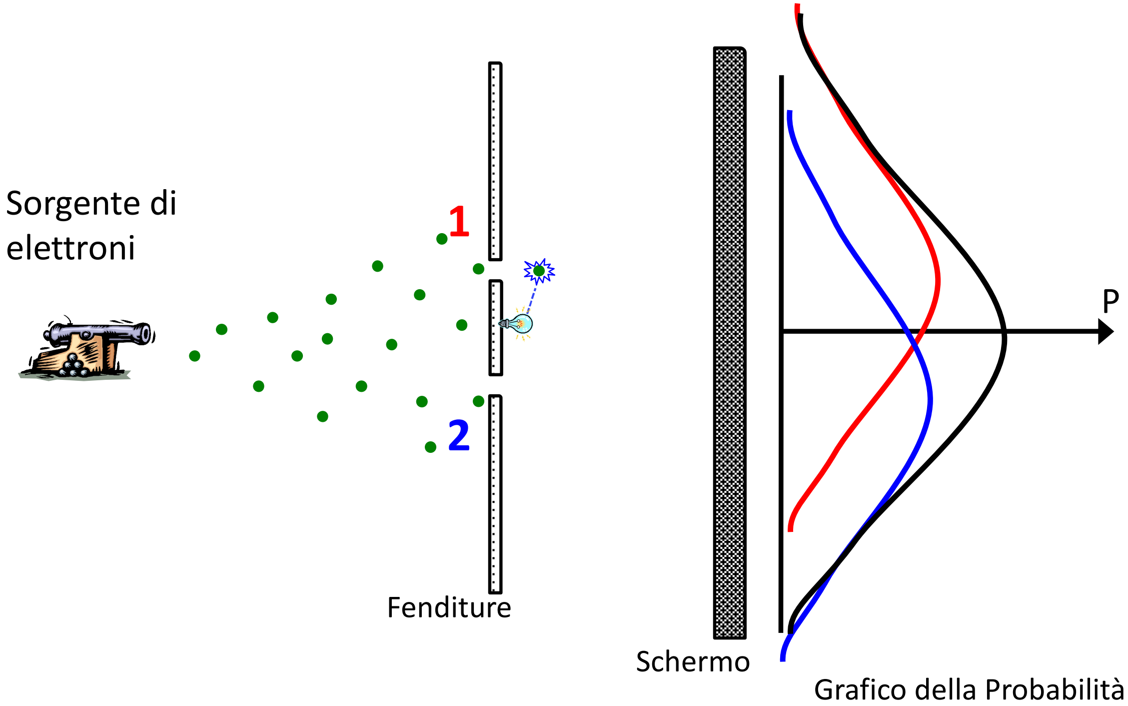
Quello che succede è che ogni singolo elettrone è descritto dalla sua funzione d’onda…
all’uscita dalle due fenditure ci sono le due f.d.o. ψ_1 e ψ_2 che si sommano nello spazio.

La probabilità di trovare un elettrone sullo schermo è data dal quadrato della f.d.o totale…
$P(1+2) \propto (\psi_1 + \psi_2)^2$…. e la somma di onde dà interferenza.
Quindi gli elettroni si comportano come onde, quando passano attraverso le fenditure… e come particelle quando vengono rivelate.

Ma l’elettrone è indivisibile, da dove passa veramente?
Posso provare a guardarlo?

Guardiamo gli elettroni:

Mettiamo una lampadina vicino alle fenditure: se passa un elettrone viene illuminato, io faccio la fotografia e vedo da dove è passato.



1. Aperta solo la fenditura 1: **P1** – (li fotografo)
2. Aperta solo la fenditura 2: **P2** (foto)

- Aperte tutte e due: **P (foto)**

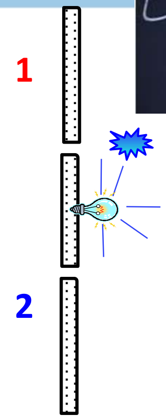
L'interferenza è sparita!

Ora so bene da dove passa ogni singolo elettrone, o passa da una fenditura, o passa dall'altra, ma non ho più interferenza.

PERCHE'?

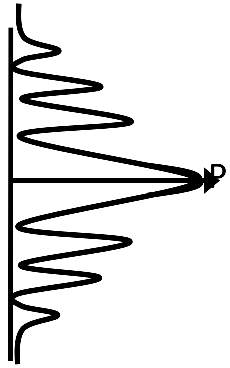
Guardiamo gli elettroni - II

Ma certo che non vedo l’interferenza: se illumino l’elettrone gli mando fotoni con una certa energia E=hf, questi fotoni colpiscono l’elettrone, lo «disturbano» , lo spostano…in ogni caso modificano il suo cammino e le relazioni di fase che caratterizzano l’interferenza non sono più valide…e vedo solo la somma delle Probabilità….

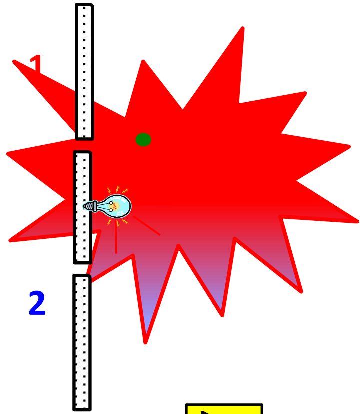


Ma allora posso fare una cosa: diminuire l’energia del fotone, cioè diminuire la sua frequenza, passo da E=h**f** (blu), a E=h**f** (rossa)...quindi lo disturberò molto poco. Ottimo, proviamo: vedo l’interferenza?

Si! L’interferenza è ritornata:

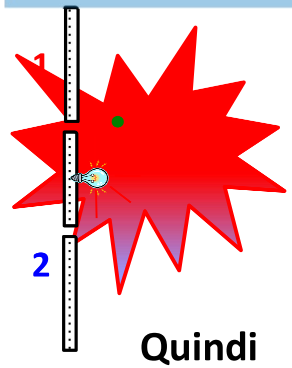


E ora andiamo a vedere le foto, per sapere da dove sono passati i singoli elettroni:



Il lampo non è localizzato…non riesco a sapere dove sta l’elettrone!

Guardiamo gli elettroni - III



Certo! La luce rossa ha meno energia E=hf, quindi non disturba gli elettroni, ma la sua frequenza f è minore…quindi la lunghezza d’onda è maggiore…e la risoluzione spaziale è legata alla lunghezza d’onda (è il potere risolutivo in ottica).
Così vedo l’elettrone, ma non posso sapere da dove è passato…

Quindi

- Se non guardo l’elettrone…si comporta come un’onda…vedo l’interferenza.
- Se lo guardo per vedere dove sta, e uso una luce opportuna…l’interferenza sparisce e si comporta come una particella.
- Se lo guardo…ma non riesco a sapere dove sta…si comporta come un’onda.

E se provo a fare i calcoli per sapere cosa devo fare per «vederlo» scopro che tutto è coerente con il Principio di Indeterminazione…

$$\mathbf{\Delta x \cdot \Delta v \geq \hbar/m}$$

Se lo vedo bene Δx è piccola,   ma Δv è grande… e l’interferenza sparisce.
Se vedo l’interferenza $\rightarrow$ Δv è piccola, ma allora Δx è grande, e non posso sapere dove sta.

Heisenberg

Per concludere: non posso chiedermi dove sta l’elettrone, se voglio mantenere le sue caratteristiche di onda.

Tutto questo era legato al fatto che io volevo misurarlo…ma se non lo misuro?
Non cambia niente, una sistema quantistico NON può avere contemporaneamente le due proprietà posizione e velocità con precisione arbitraria. Oppure [Energia, Tempo]

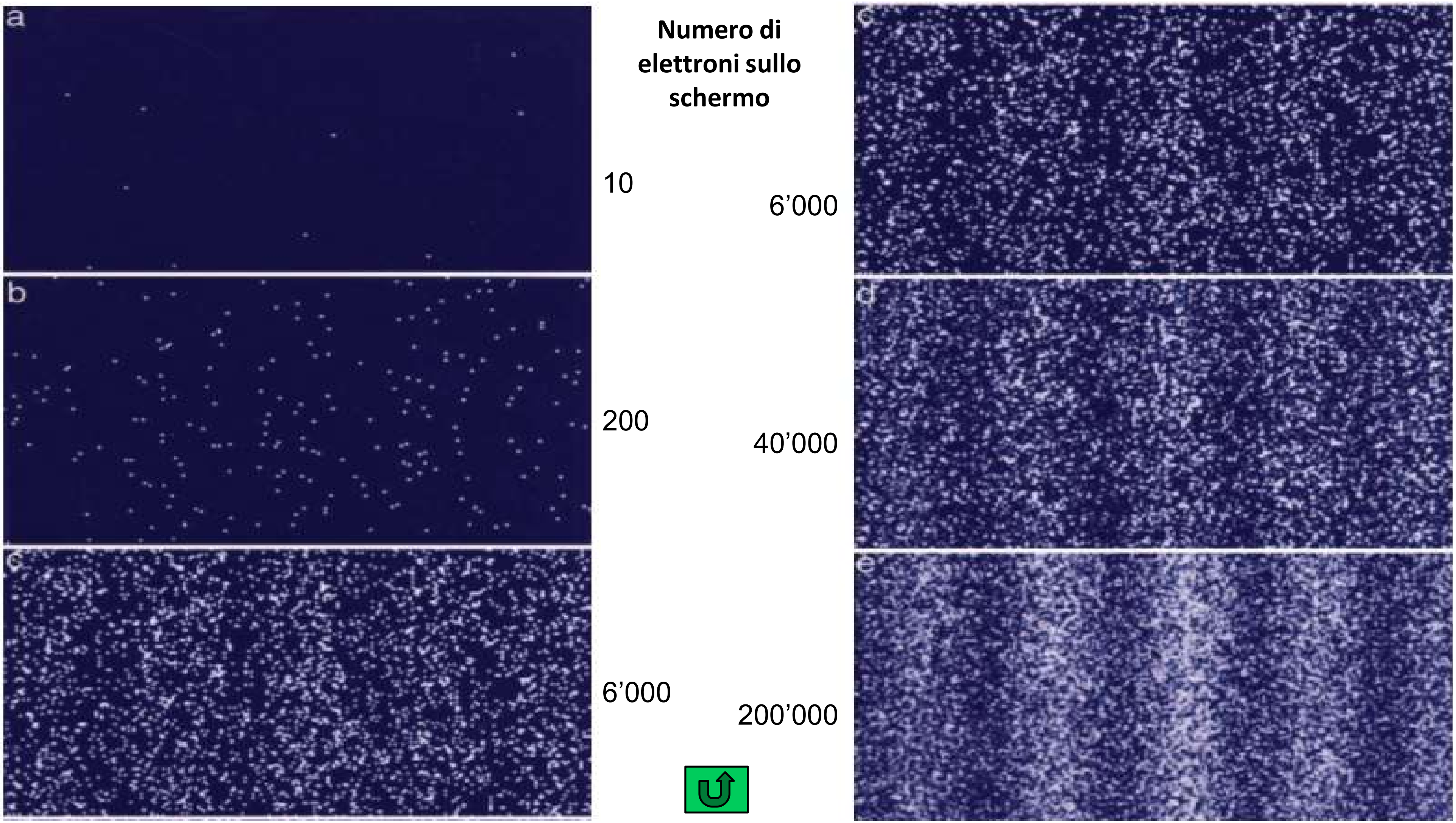
ANALOGIA CLASSICA (ATTENZIONE!) Le onde sonore di uno strumento:

- se il suono è lungo posso individuare molte bene che nota sta suonando (i violini che accordano l’orchestra suonando una nota a lungo)….la frequenza….
- Se il suono è molto breve…è una somma di molte frequenze. Non posso accordare gli strumenti usando un colpo di tamburo.

Quindi:

- Se il suono è lungo non posso definire esattamente quando è stato emesso.
- Se il suono è breve non posso definire una frequenza precisa.

Meccanica Classica: $\Delta f \cdot \Delta t \sim 1$ Meccanica Quantistica: $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$


Numero di elettroni sullo schermo
a
10
b
200
c
6'000
6'000
d
40'000
e
200'000

La visione del mondo
della Relatività e della Meccanica Quantistica

Settimana 6

Lezione 6.2
La funzione d'onda e la «misura»
L'effetto tunnel

Carlo Cosmelli

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

coursera

Come «funziona» la funzione d'onda?

Per chiarire come «funziona» la MQ dobbiamo capire bene il processo della «misura».
Ci sono due punti fermi, che sembrano contraddittori:
1. La **funzione d'onda** è deterministica…ha un'evoluzione temporale **definita**.
2. Il risultato di una **misura** è **probabilistico.**

Cosa succede quando io «misuro» qualcosa (Es. la posizione dell'elettrone)?

1. L'elettrone **prima** della misura è descritto dalla f.d.o.
   - L'elettrone non è localizzato…
   - La f.d.o. è estesa nello spazio
2. Quando faccio la misura avviene il **collasso** della funzione d'onda; la f.d.o. collassa in uno dei tanti risultati possibili, ho un risultato **certo (dopo la misura).**
3. Dopo la misura la f.d.o. ricomincia ad essere estesa…fin quando l'elettrone non verrà misurato un'altra volta.

Nota: misurare vuol dire interagire; per avere interazione non serva che ci sia un «misuratore», basta che il sistema interagisca con un oggetto esterno.

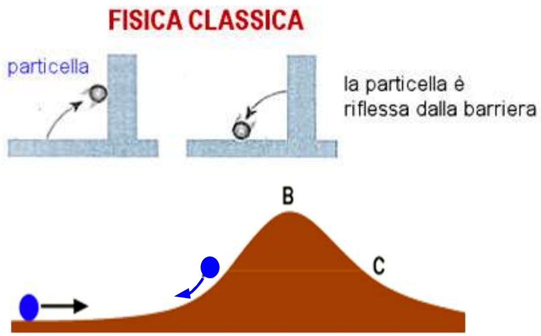
Vediamo una simulazione: →[PHET – Università del Colorado]

Un effetto esclusivamente quantistico: l'effetto tunnel

Cosa succede secondo la meccanica classica:

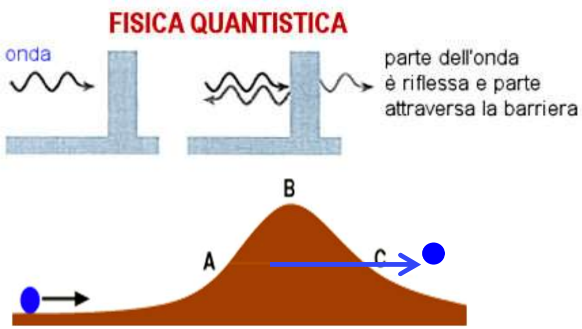
- Se lancio una particella contro un muro…

- La stessa cosa avviene se lancio una palla verso una collina, ma non gli do energia sufficiente a superarla.



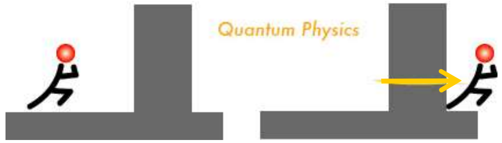
Cosa succede secondo la meccanica quantistica:

- C'è una certa probabilità che il corpo passi attraverso la barriera.

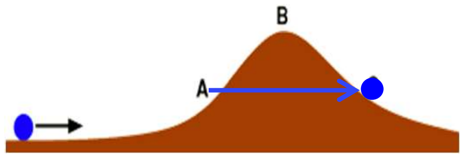


Molti dispositivi elettronici funzionano tramite questo effetto!

L’effetto tunnel – Una simulazione



Secondo la meccanica quantistica c’è una certa probabilità che il corpo passi attraverso la barriera.

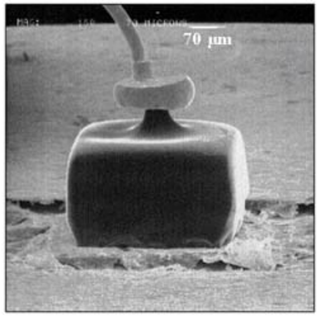


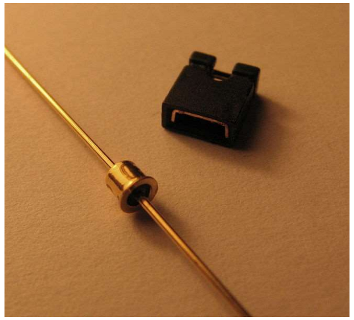
La probabilità può essere piccola…grande… dipende dall’energia del corpo, dall’altezza della barriera…

Vediamo una simulazione: → PHET

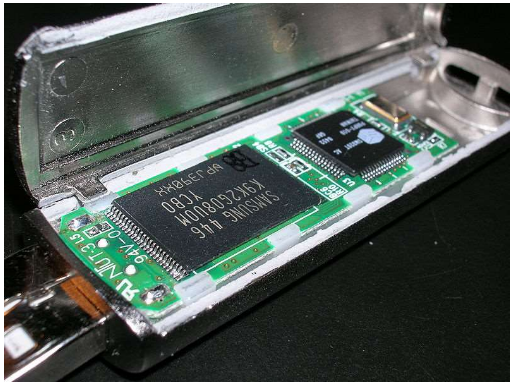
L’effetto tunnel – Oggetti reali

Un diodo ad effetto tunnel:

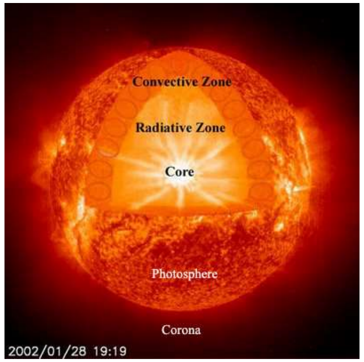




Una memoria a stato solido



Le reazioni di fusione nucleare nelle stelle

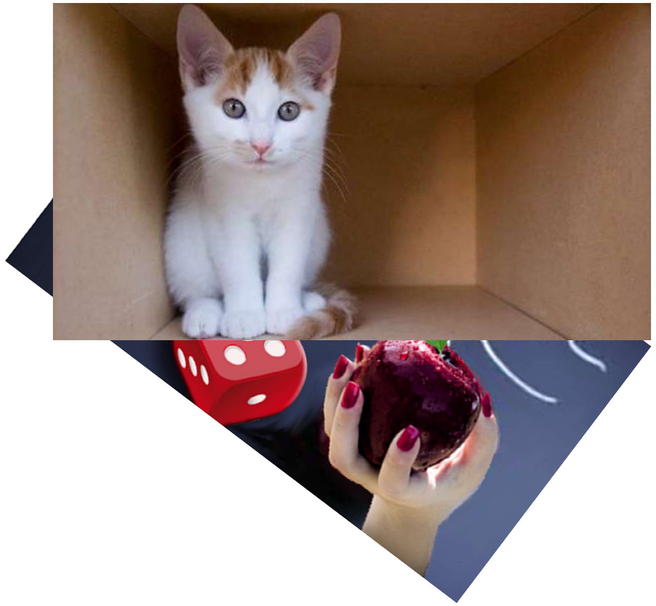


Microscopio ad effetto tunnel

La visione del mondo
della Relatività e della Meccanica Quantistica

Settimana 6

Lezione 6.3
La sovrapposizione delle soluzioni
Il gatto di Schrödinger



Carlo Cosmelli

Sapienza Università di Roma

coursera

Il problema di un evento con due possibili modalità

Caso classico:
Il sistema: una moneta
L'evento: il lancio della moneta, 1 volta
I possibili risultati: Testa (T) o Croce (C).
Le probabilità: P(T)=P(C)=50%.
Uno dei due risultati esclude l'altro

Caso quantistico:
Il sistema: un elettrone sparato verso due fenditure piccole
L'evento: la rivelazione sullo schermo oltre le fenditure.
I possibili «percorsi»: **f.d.o. attraverso F1 o F2.**
Le probabilità di rivelare l'elettrone sullo schermo:
(La f.d.o. $\psi(r,t)$ è un'ampiezza di probabilità). $P_{tot}(r,t) = |\psi_{tot}|^2$

Se ho **più possibilità relative al verificarsi di un evento**, per esempio se ho due modalità **1, 2** ognuna descritta da una funzione d'onda ψ_1, ψ_2, allora ho:

$$\psi_{tot} = \psi_1 + \psi_2 \qquad \text{e} \qquad P_{tot}(r,t) = |\psi_{tot}|^2 = |\psi_1 + \psi_2|^2$$

Cioè:
PRIMA si sommano le ampiezze di probabilità (le due f.d.o.) per calcolare la ψ_{tot}
POI si fa il modulo quadro della ψ_{tot} per avere la probabilità.

Esempio «classico»: La somma di due raggi di luce 1.

Consideriamo **la luce**, cioè un'onda elettromagnetica, **l'intensità luminosa in un punto x** è proporzionale al **quadrato del campo elettrico in quel punto**

$$\mathbf{I}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}^2(\mathbf{x})$$

Quindi se in un punto **x** arrivano due onde luminose **1** e **2** con la stessa frequenza, ed ampiezza: $\mathbf{E_1(x)}$ **,** $\mathbf{E_2(x)}$, **l'intensità luminosa risultante** è:

$$I_{tot}(x) \propto E_{tot}^2(x) = [E_1(x) + E_2(x)]^2 = E_1^2(x) + E_2^2(x) + \boxed{2E_1(x)E_2(x)}$$

Intensità di **1 >0**

Intensità di **2 >0**

Termine di Interferenza >0, =0, < 0

Esempio «classico»: La somma di due raggi di luce 2.

Quindi se in un punto **x** arrivano due onde luminose **1** e **2** con la stessa frequenza, la stessa ampiezza, ma fase diversa:

$E_1(x)=E_0$ cos$(\varphi_1) =$ $E_2(x)$, $E_2(x)=E_0$ cos(φ_2) l'intensità luminosa risultante sarà:

$$I_{TOT}(x) = E^2_{TOT}(x) = [E_1(x) + E_2(x)]^2$$

$$= E_0^2 + E_0^2 + \boxed{2E_0 \cdot E_0 \cos\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}} = 2E_0^2\left[1 + \cos\frac{\Delta\varphi}{2}\right] =$$

se $\Delta\varphi = 0 \Rightarrow 4\mathrm{E}_0^2$ **luce**

se $\Delta\varphi = 2\pi \Rightarrow 0$ **buio**

Intensità di **1 >0**

Intensità di **2 >0**

Termine di Interferenza: > 0, = 0, < 0

Il principio di sovrapposizione delle onde.

Se un sistema descritto dall'equazione delle onde ha come soluzioni due onde $\mathbf{E_1}$, $\mathbf{E_2}$ allora anche:

$$\mathbf{E = a_1\, E_1 + a_2\, E_2}$$

sarà **una soluzione del sistema**, dove $\mathbf{a_1}$ **e** $\mathbf{a_2}$ sono due costanti arbitrarie.

La ragione è legata alla linearità delle equazioni che descrivono il sistema, è una proprietà matematica del sistema.

Esempio classico: se prendo una corda e vedo che posso farla vibrare con la frequenza f_1 [$A(t) \propto \cos \omega_1 t$] , o con la frequenza f_2 [$A(t) \propto \cos \omega_2 t$] allora posso farla vibrare anche con l'ampiezza:
$\mathbf{A = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t}$ **,** cioè anche la somma di soluzioni è una soluzione del sistema. Questo con gli oggetti meccanici «classici» è impossibile

Il principio di sovrapposizione in Meccanica Quantistica

Se ho un sistema descritto da due funzioni d'onda ψ_1 **e** ψ_2 **,** allora

$$\boldsymbol{\psi_{tot} = a_1\ \psi_1 + a_2\,\psi_2}$$

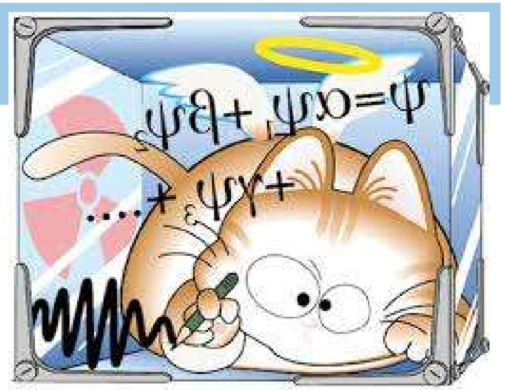
sarà **una soluzione del sistema**, dove $\mathbf{a_1}$ **e** $\mathbf{a_2}$ sono due costanti arbitrarie.

Per esempio l'elettrone, all'uscita dalle fenditure, nell'esperimento delle due fenditure, può essere descritto dalla funzione d'onda ψ_1[è passato dalla fenditura 1] e dalla funzione d'onda ψ_2[è passato dalla fenditura 2].
Se entrambe le fenditure sono aperte, cioè se la f.d.o. può essere sia quella passata da 1 che quella passata da 2, allora l'elettrone è descritto da una funzione d'onda somma delle due, cioè una f.d.o. che passa per entrambe le fenditure.

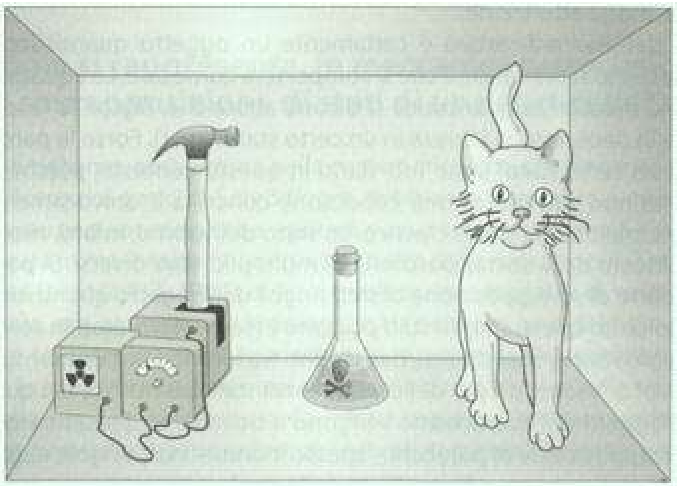
Nota: questo non è vero in meccanica classica. Se io posso entrare in una stanza passando per la porta 1 oppure per la porta 2… non posso entrarci passando per la porta 1 **E** per la porta 2.

In MQ se voglio calcolare la probabilità di un certo evento devo prendere in considerazione TUTTI i possibili cammini nello spazio tempo e tutte le modalità con cui può avvenire quell'evento, sommarle e calcolare la probabilità …

Il Gatto di Schrödinger: sta bene?



Il Gatto è un esperimento ideale in cui si applica ad un sistema macroscopico la sovrapposizione delle funzioni d'onda.
Cosa dice Schrödinger: …*possono aversi casi «ridicoli»*



La probabilità di decadimento dell'atomo radioattivo è del 50% ogni ora.

Dopo un'ora: come sarà l'atomo?
Come sarà la fiala?
Come sarà il gatto?
Idealmente, se il sistema fosse microscopico e non interagisse con niente sarebbe nella sovrapposizione dei due stati possibili…e farei collassare la funzione aprendo la scatola per vedere come sta…

$$\begin{cases} \text{Atomo decaduto} \rightarrow \text{fiala rotta} \rightarrow \text{gatto avvelenato: } \psi = \psi(1) \\ \text{Atomo non decaduto} \rightarrow \text{fiala sana} \rightarrow \text{gatto sano: } \psi = \psi(2) \end{cases}$$

Potere risolutivo

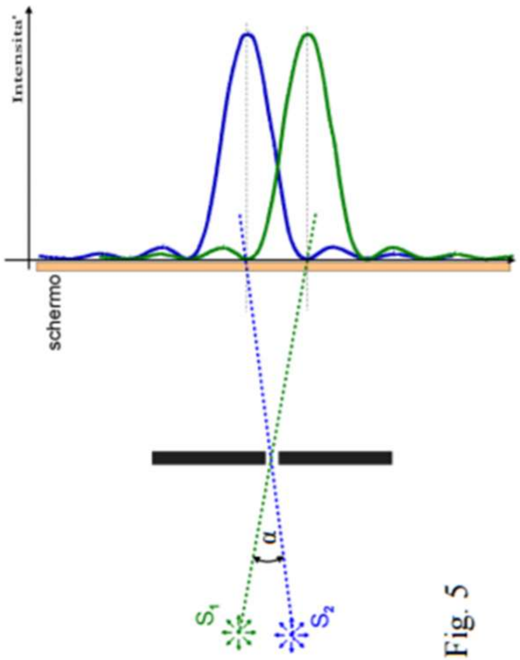


Fig. 5